Ad-Soyad :

Numara : Cevap Anahtarı

MAT 201 Lineer Cebir I Ara Sınav Soruları 01.12.2022

Not: Süre 90 dakikadır. Çözümlerinizi ayrıntılı olarak yazınız. Başarılar dilerim.

1) Aşağıdaki soruları yanında bulunan parantez içine doğru ise "D", yanlış ise "Y" yazarak cevaplayınız (Her şık 4 puandır).

(Y) A boş olmayan bir küme olmak üzere A dan A ya tanımlanan her fonksiyona A da bir iç işlem denir.

(D) $(G,*)$ bir grup ise * işlemi G de birleşimli bir iç işlemdir.

(D) Her grupta birim elemanın tersi kendisidir.

(Y) Bir küme bir işleme göre kapalı ise her elemanın tersi vardır.

(Y) Her birimli halka değişmelidir.

2) $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $x * y = x + xy + y$ olarak tanımlanan işlem ile birlikte $(\mathbb{Z},*)$ ikilisinin bir grup olup olmadığını araştırınız (20 p).

3) * işlemi boş olmayan bir A kümesi üzerinde birleşme ve birim eleman özelliğini sağlayan bir iç işlem olsun. A kümesinde bu iç işleme göre tersi olan bir elemanın tersinin tek olduğunu gösteriniz (20 p).

4) $U = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$ olmak üzere $\forall (x, y),(z,t) \in U$ için

$$
\begin{aligned}
&(x, y) = (z,t) \Leftrightarrow x = z, y = t\\
&(x, y) + (z,t) = (x + z, y + t)\\
&(x, y).(z,t) = (xz - yt, xt + yz)
\end{aligned}
$$

şeklinde eşitlik, toplama ve çarpma işlemleri tanımlanıyor. $(U,+,.)$ üçlüsünün bir halka olduğu biliniyor. Buna göre

a) U değişmeli midir? (10 p) b) U birimli midir? (10 p)

5) Reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi V olsun. $\forall f, g \in V$ ve $\forall c, t \in \mathbb{R}$ için

$$
\begin{aligned}
&(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t),\\
&(c \odot f)(t) = cf(t)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanan işlemler ile birlikte V nin reel sayılar cismi üzerinde vektör uzayı olduğunu gösteriniz (20 p).

2) Kapalılık: $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ için $x*y = x+xy+y \in \mathbb{Z} \Rightarrow *$ işlemi $\mathbb{Z}$ de iç işlemdir.

Birleşme: $\forall x,y,z\in\mathbb{Z}$ için

$$(x*y)*z = (x+xy+y)*z = (x+xy+y)+(x+xy+y)z+z$$
$$= x+xy+y+xz+xyz+yz+z$$
$$x*(y*z) = x*(y+yz+z) = x+x(y+yz+z)+(y+yz+z)$$
$$= x+xy+xyz+xz+y+yz+z$$
$$= x+xy+y+xz+xyz+yz+z$$

$\Rightarrow (x*y)*z = x*(y*z)$ olup birleşme özelliği sağlanır.

Birim eleman: $\forall x\in\mathbb{Z}$ için $x*e = e*x = x$ olacak şekilde $e\in\mathbb{Z}$ var mı?

$$x*e=x \Leftrightarrow x+xe+e=x \Leftrightarrow e(x+1)=0 \Leftrightarrow e=0 \vee x=-1$$
$$e*x=x \Leftrightarrow e+ex+x=x \Leftrightarrow e(1+x)=0 \Leftrightarrow e=0 \vee x=-1$$

O halde, $e=0\in\mathbb{Z}$ $*$ işleminin birim elemanıdır.

Ters eleman: $\forall x\in\mathbb{Z}$ için $x*y=0=y*x$ olacak şekilde $y\in\mathbb{Z}$ var mı?

$$x*y=0 \Leftrightarrow x+xy+y=0 \Leftrightarrow y(x+1)=-x \Leftrightarrow y=-\frac{x}{x+1}$$

$x=-1\in\mathbb{Z}$ için $-1*y=0 \Leftrightarrow -1-y+y=0 \Leftrightarrow -1=0$ çelişkisi elde edildiğinden -1 in tersi yoktur.

$\therefore$ $(\mathbb{Z},*)$ ikilisi grup değildir.

3) $x\in A$ nın $*$ işlemine göre y_1 ve y_2 gibi terslerinin olduğunu kabul edelim. Bu durumda $e\in A$ bu işlemin birim elemanı olmak üzere

$$x*y_1=e=y_1*x \quad \text{ve} \quad x*y_2=e=y$$

yazılabilir.

$x*y_1=e \Rightarrow y_2*(x*y_1)=y_2*e \Rightarrow$ Birleşme ve birim eleman özelliğinden $\underbrace{\underbrace{(y_2*x)}_{e}*y_1}_{y_1}=y_2 \Rightarrow y_1=y_2$ olup x in tersi varsa tektir.

4) $\forall (x,y),(z,t)\in U$ alalım.

a) U değişmelidir $\Leftrightarrow (x,y).(z,t)=(z,t).(x,y)$

$$(x,y).(z,t)=(xz-yt,\ xt+yz)=(zx-ty,\ zy+tx)=(z,t).(x,y)$$

($\mathbb{Z}$ de çarpma ve toplama değişmeli)

O halde, U değişmelidir.

b) U birimlidir $\Leftrightarrow \forall (x,y)\in U$ için $(x,y)(e_1,e_2)=(e_1,e_2)(x,y)=(x,y)$ olacak şekilde $(e_1,e_2)\in U$ vardır.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (xe_1-ye_2,\ xe_2+ye_1)=(x,y) \Leftrightarrow \begin{array}{l} xe_1-ye_2=x \\ xe_2+ye_1=y \end{array} \Leftrightarrow (e_1,e_2)=(1,0) \\ (e_1x-e_2y,\ e_1y+e_2x)=(x,y) \Leftrightarrow (e_1,e_2)=(1,0) \end{cases}$$

$(e_1,e_2)=(1,0)\in U$ ikinci işlemin birimi olup halka birimli halkadır.

5) $(V,\oplus)$ değişmeli gruptur:

- **$V\neq\phi$:** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\to f(x)=0$ fonksiyonu sürekli $\Rightarrow f\in V\Rightarrow V\neq\phi$.

- **Kapalılık:** $\forall f,g\in V$, $\forall t\in\mathbb{R}$ için

$$(f\oplus g)(t)=f(t)+g(t)$$

ve sürekli iki fonksiyonun toplamı sürekli olduğundan $f\oplus g$ sürekli olup $f\oplus g\in V$ dir, yani $(V,\oplus)$ kapalılık özelliğini sağlar.

- **Birleşme:** $\forall f,g,h\in V$, $\forall t\in\mathbb{R}$ için

$$((f\oplus g)\oplus h)(t)=(f\oplus g)(t)+h(t)=(f(t)+g(t))+h(t)=f(t)+(g(t)+h(t))$$
$$=f(t)+(g\oplus h)(t)=(f\oplus(g\oplus h))(t)$$

$\Rightarrow (f\oplus g)\oplus h=f\oplus(g\oplus h)$ olup birleşme özelliği sağlanır.

- **Birim eleman:** $\forall f\in V$, $\forall t\in\mathbb{R}$ alalım.

$f\oplus g=f=g\oplus f$ olacak şekilde $g\in V$ var mı?

$f\oplus g=f\Leftrightarrow (f\oplus g)(t)=f(t)\Leftrightarrow f(t)+g(t)=f(t)\Leftrightarrow g(t)=0,\ \forall t\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow g=0\in V$

$g\oplus f=f\Leftrightarrow (g\oplus f)(t)=f(t)\Leftrightarrow g(t)+f(t)=f(t)\Leftrightarrow g(t)=0,\ \forall t\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow g=0\in V$

O halde, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\to g(x)=0$ sıfır fonksiyonu V nin birim elemanıdır.

- **Ters eleman:** $\forall f\in V$, $\forall t\in\mathbb{R}$ için $-f\in V$ dir. Ayrıca

$(f\oplus(-f))=f(t)+(-f)(t)=0$ ve $((-f)\oplus f)(t)=(-f)(t)+f(t)=-f(t)+f(t)=0$

olup $-f$, $f\in V$ nin tersidir.

- **Değişme:** $\forall f,g\in V$, $\forall t\in\mathbb{R}$ için

$$(f\oplus g)(t)=f(t)+g(t)=g(t)+f(t)=(g\oplus f)(t)\Rightarrow f\oplus g=g\oplus f$$

olup değişme özelliği sağlanır.

$\therefore (V,\oplus)$ değişmeli gruptur.

Şimdi de dış işlem aksiyomlarının sağlandığını gösterelim:

$\forall f,g\in V$, $\forall c_1,c_2,t\in\mathbb{R}$ alalım.

- $(c_1\odot(f\oplus g))(t)=c_1(f\oplus g)(t)=c_1(f(t)+g(t))=c_1f(t)+c_1g(t)$
$=(c_1\odot f)(t)+(c_1\odot g)(t)=((c_1\odot f)\oplus(c_1\odot g))(t)$

$\Rightarrow c_1\odot(f\oplus g)=c_1\odot f\oplus c_1\odot g$

. $((c_1+c_2)\odot f)(t) = (c_1+c_2)f(t) = c_1 f(t) + c_2 f(t) = (c_1\odot f)(t) + (c_2\odot f)(t)$

$= ((c_1\odot f)\oplus(c_2\odot f))(t)$ $\qquad (c\odot f)(t) = cf(t)$

$\Rightarrow (c_1+c_2)\odot f = (c_1\odot f)\oplus(c_2\odot f)$

. $((c_1 c_2)\odot f)(t) = (c_1 c_2) f(t) = c_1(c_2 f(t)) = c_1((c_2\odot f)(t)) = (c_1\odot(c_2\odot f))(t)$

$\Rightarrow (c_1 c_2)\odot f = c_1\odot(c_2\odot f)$

. $(1\odot f)(t) = 1.f(t) = f(t) \Rightarrow 1\odot f = f$

$\therefore (V,\oplus,\mathbb{R},+,\cdot,\odot)$ altılısı vektör uzayıdır.